UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero–Marzo 00

Nombre: ____________________

Carnet: ____________ Sección: ______

MA2112. 1er. Parcial. 9:30 AM. B

1. (12 ptos.) Determine el punto del gráfico de $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta de intersección de los planos de ecuaciones $x - y - z = 1$ y $y - z = 0$. Determine también la ecuación de dicho plano tangente.

   Solución El plano $x - y - z = 1$ tiene normal $(1, -1, -1)$ y la recta $y - z = 0$ tiene normal $(0, 1, -1)$. La recta intersección de estos planos tiene la dirección del producto cruz de las dos normales, lo que es

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

   que se evalúa a $(2, 1, 1)$. El plano tangente a $z = f(x, y)$ en un punto (a, b, c) es $z = c + \nabla f(a, b).(x - a, y - b)$ y este plano tiene normal $(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$. En el caso bajo consideración pues, la normal al plano tangente en un punto general (x, y, z) es $(2x, -4y, -1)$. Este tiene la dirección $(2, 1, 1)$ de la recta ssi existe $\lambda \neq 0$ tal que $(2x, -4y, -1) = \lambda(2, 1, 1)$. De estas 3 ecuaciones, la última da $\lambda = -1$, de donde $x = -1$, $y = -1/4$, y z se obtiene de la ecuación de la superficie, $z = (-1)^2 - 2(-1/4)^2 = 7/8$.

   El punto donde el plano tangente es perpendicular a la recta dada es

$$P = (-1, \frac{1}{4}, \frac{7}{8})$$

   Aplicando la fórmula citada arriba, el plano tangente en el punto es

$$z = \frac{7}{8} + (-2, -4)(x + 1, y - \frac{1}{4})$$

   Simplificando, la ecuación del plano tangente bajo consideración es

$$2x + 4y + z = -\frac{7}{8}$$

   Mas corto, sabiendo que el plano tangente tiene normal $(2, 1, 1)$, su ecuación será $(2, 1, 1)(x + 1, y - 1/4, z - 7/8) = 0$, o, si prefiere $(2, 1, 1).(x, y, z) = c$ y ajustar c para que el plano pase por P.

2. (13 ptos.) Sea $z = f(x,y)$ de clase C^2 definida implícitamente por la ecuación $x^2ze^y + y^2e^z + y = 1$. Si $g(u,v) = (u^2+v+1, v^2)$, calcular

$$\frac{\partial^2 f\circ g}{\partial u \partial v}(0,0).$$

Solución. Si $F(x,y)$ es cualquier función, y $x = u^2+v+1$, $y = v^2$, entonces, por las reglas de la cadena, $F_u = F_x.x_u + F_y.y_u$ y $F_v = F_x.x_v + F_y.y_v$. Calculando $x_u = 2u$, $x_v = 1$, $y_u = 0$, $y_v = 2v$, asi que

$$\begin{aligned} F_u &= 2uF_x &(1)\\ F_v &= F_x + 2vF_y &(2) \end{aligned}$$

Aplicando estas reglas a $z = f(x,y)$

$$z_v = z_x + 2vz_y$$

Derivando esta en u da

$$z_{uv} = \frac{\partial}{\partial u}(z_x + 2vz_y)$$

Ahora, usando la regla (2), $\dfrac{\partial z_x}{\partial u} = 2u(z_x)_x = 2uz_{xx}$, mientras que $\dfrac{\partial(2vz_y)}{\partial u} = 2v\dfrac{\partial z_y}{\partial u}$ (u y v son variables independientes), y, usando (1), $2v\dfrac{\partial z_y}{\partial u} = 2v.2u(z_y)_x = 4uvz_{yx}$. Sumando

$$z_{uv} = 2uz_{xx} + 4uvz_{yy}$$

Evaluando en $(u,v) = (0,0)$ da 0. (Era suerte que no se necesitan las derivadas z_{xx}, z_{yy} explícitamente, asi que no se tuvieron que calcular. Si la pregunta hubiera pedido la misma z_{uv} pero en, p. ejemplo, $(1,1)$ entonces se tendrian que calcularlas.)

3. (12 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} y + xy\frac{x-y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) ¿Es f continua en $(0,0)$?

(b) ¿Tiene f derivadas parciales en $(0,0)$?

(c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Solución (a) Puesto que la función y es contínua y diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, y que la suma y resta de funciones contínuas (rep. diferenciables) es contínua (resp. diferenciable) basta estudiar el segundo término en la definición de f, definido como 0 en $(0,0)$-la llamamos $g(x,y)$. Primero, se adivina que g es contínua en $(0,0)$, puesto que el numerador tiene grado mayor que el denominador. Formalmente, hay que probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - y^2x}{x^2+y^2} = 0$$

Cambiar a polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Sustituyendo, se quiere

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)}{r^2}$$

Eso es

$$\lim_{r\to 0} r\left(\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right)$$

que es claramente 0.

(b). Las derivadas parciales existen en 0. Calculando p. ejemplo $g_x(0,0)$ via la definición de derivada parcial, hay que calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x}$$

pero $g(x,0) = g(0,0) = 0$ para todo x, y luego el límite existe y vale 0. Semejante para g_y.

(c)f no es diferenciable en $(0,0)$. Basta ver que g no lo es. Por la definición de diferenciabilidad, g es diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|g(0+h_1, 0+h_2) - g(0,0) - xg_x(0,0) - yg_y(0,0)|}{||(h_1,h_2)||}$$

existe. Eso es, usando los valores ya calculados de $g_x(0,0)$ etc., hay que investigar la existencia de

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2 - h_2^2h_1}{(h_1^2+h_2^2)(\sqrt{h_1^2+h_2^2})}$$

Pero mirando el límite cuando se acerca a lo largo de $y = x$, se obtiene

$$\lim_{(h,h)\to(0,0)} \frac{h^3+h^3}{h^2.\sqrt{2h^2}}$$

$$= \lim_{(h,h)\to(0,0)} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Asi si el límite bajo investigación existe, no es 0 y g, luego f, no es diferenciable en $(0,0)$. (De hecho, el límite no existe, como se ve facilmente mirando $\lim_{(x,0)\to(0,0)}$ pero no es necesario probarlo).

4. (13 ptos.) Sea $f(x,y) = (1-x^2)\operatorname{sen} y$.

   (a) Hallar y clasificar los puntos críticos de f en $(0,2)\times(0,2\pi)$.

   (b) Hallar el máximo y mínimo globales de f en $[0,2]\times[0,2\pi]$.

   Solución (a). Se buscan los ceros comunes de $f_x = -2x\operatorname{sen} y$ y $f_y = (1-x^2)\cos y$ en el interior del rectángulo. $f_x = 0$ da $x = 0$ o $\operatorname{sen} y = 0$ El eje y no pertenence al interior del cuadrado, asi que se descarta $x = 0$, y se queda con posibles soluciones $x = \pm 1$ y y un cero del seno. Los ceros de seno son $n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Puntos con x-coordenada -1 quedan fuera del rectángulo, y luego se queda con puntos $(1, n\pi)$. Dentro del rectángulo queda unicamente $(1,\pi)$. El Hessiano de f es

$$\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} y & -2x\cos y \\ -2x\cos y & -(1-x^2)\operatorname{sen} y \end{pmatrix}$$

   que en $(1,\pi)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   cuyo determinante es $-4 < 0$. Est dice que $(1,\pi)$ es una silla. Resumiendo
   En $(0,2)\times(0,2\pi)$ hay un único punto crítico, ubicado en $(1,\pi)$ y es una silla.

   (b) Se buscan extremos de f en el borde del rectángulo. Ya que f no tiene ni max ni min (nisiquera local) en el interior, el max (min.) en el borde sera el max (min) global de f.

   - En $x = 0, 0 \le y \le 2\pi$, $f(0,y) = \operatorname{sen} y$ y tiene max. 1, min -1.
   - En $y = 2\pi, 0 \le x \le 2$ f es identicamente 0.
   - En $x = 2, o \le y \le 2\pi$, $f(2,y) = -3\operatorname{sen} y$ con max. 3 y min. -3.
   - En $y = 0, 0 \le x \le 2$, $f(x,0)$ es identicamente 0.

   Se concluye que el max de f en $[0,2]\times[0,2\pi]$ es 3 y el min. es -3.